

## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Die Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  des Drachenvierecks  $ABCD$  schneiden sich im Punkt  $K$ . Das Drachenviereck  $ABCD$  ist die Grundfläche des geraden Prismas  $ABCDEFGH$ . Der Punkt  $E$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ .

Es gilt:

$$\overline{AC} = 12 \text{ cm}; \overline{BD} = 10 \text{ cm}; \overline{AK} = 4 \text{ cm}; \overline{AE} = 6 \text{ cm}.$$

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEFGH$ , wobei  $[AC]$  auf der Schrägbildachse und der Punkt  $A$  links vom Punkt  $C$  liegen soll.

Für die Zeichnung:  $p = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$

Die Strecken  $[EG]$  und  $[FH]$  schneiden sich im Punkt  $L$ .

Berechnen Sie das Maß des Winkels  $LC K$ . [Ergebnis:  $\angle LCK = 36,87^\circ$ ]

### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[LC]$ . Die Winkel  $CK P_n$  haben das Maß mit  $\varphi \in ]0^\circ, 90^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $B$  und  $D$  die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke  $BD P_n$  mit der Basis  $[BD]$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $BD P_1$  sowie die Strecke  $[K P_1]$  für  $\varphi = 78^\circ$  in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke  $BD P_n$  gleichseitig ist.

### Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken  $[K P_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$\overline{K P_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}.$$

Die Länge der Strecke  $[K P_0]$  ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für  $\varphi$  an.

### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCD P_n$  mit der Grundfläche  $ABCD$  und den Höhen  $[P_n Q_n]$ . Die Punkte  $Q_n$  liegen auf der Strecke  $[KC]$ .

Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCD P_1$  und die Höhe  $[P_1 Q_1]$  in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCD P_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$\left[ \text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3 \right]$$

### Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide  $ABCD P_2$  beträgt  $96 \text{ cm}^3$ .

Berechnen Sie das zugehörige Maß für  $\varphi$ .

### Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden  $ABD P_n$  mit der Grundfläche  $ABD$  und der Pyramiden  $BCD P_n$  mit der Grundfläche  $BCD$  stets im Verhältnis  $1 : 2$  stehen.

## Lösung

## Aufgabe B2.

Die Diagonalen  $[AC]$  und  $[BD]$  des Drachenvierecks  $ABCD$  schneiden sich im Punkt  $K$ . Das Drachenviereck  $ABCD$  ist die Grundfläche des geraden Prismas  $ABCDEFGH$ . Der Punkt  $E$  liegt senkrecht über dem Punkt  $A$ .

Es gilt:

$\overline{AC} = 12$  cm;  $\overline{BD} = 10$  cm;  $\overline{AK} = 4$  cm;  $\overline{AE} = 6$  cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEFGH$ , wobei  $[AC]$  auf der Schrägbildachse und der Punkt  $A$  links vom Punkt  $C$  liegen soll.

Für die Zeichnung:  $p = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$

Die Strecken  $[EG]$  und  $[FH]$  schneiden sich im Punkt  $L$ .

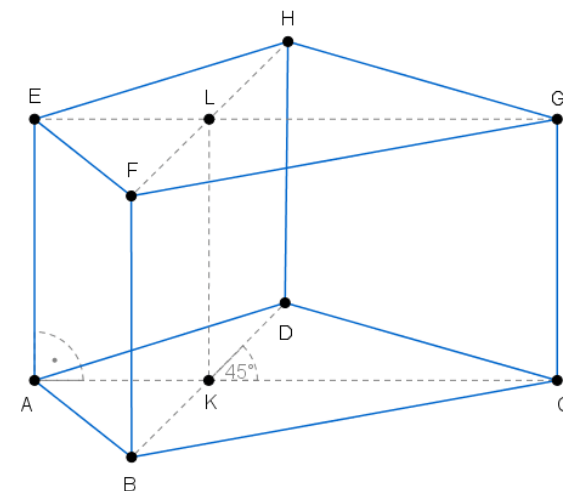
Berechnen Sie das Maß des Winkels  $LCK$ . [Ergebnis:  $\angle LCK = 36,87^\circ$ ]

## Lösung zu Aufgabe B2.1

## Skizze

Gegeben:  $\overline{AC} = 12$  cm;  $\overline{BD} = 10$  cm;  $\overline{AK} = 4$  cm;  $\overline{AE} = 6$  cm

Einzeichnen des Prismas  $ABCDEFGH$



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1)  $[AC]$  mit  $\overline{AC} = 12$  cm einzeichnen.
- 2) Punkt  $K$  mit  $\overline{AK} = 4$  cm antragen.
- 3)  $[BD]$  durch den Punkt  $K$  im Winkel von  $45^\circ$  einzeichnen.  
Für die Zeichnung:  $\overline{BK} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$
- 4) Drachen  $ABCD$  verbinden.
- 5)  $[AE]$  mit  $\overline{AE} = 6$  cm einzeichnen.
- 6) Weitere Kanten  $[BF]$ ,  $[CG]$  und  $[DH]$  mit Höhe von 6 cm einzeichnen.
- 7) Deckfläche und Prisma verbinden.
- 8) Diagonalen  $[FH]$  und  $[EG]$  einzeichnen und den Diagonalschnittpunkt  $L$  benennen.

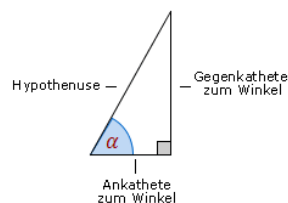
**Winkel bestimmen**

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck  $KCL$ .

Gegeben:  $\overline{KL} = 6 \text{ cm}$  und  $\overline{KC} = \overline{AC} - \overline{AK} = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$

Gesucht:  $\angle LCK$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle LCK = \frac{\overline{KL}}{\overline{KC}}$$

$$\tan \angle LCK = \frac{6}{8} \quad |\tan^{-1}$$

$$\angle LCK = 36,87^\circ$$

### Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[LC]$ . Die Winkel  $\angle CKP_n$  haben das Maß mit  $\varphi \in ]0^\circ, 90^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $B$  und  $D$  die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke  $BDP_n$  mit der Basis  $[BD]$ .

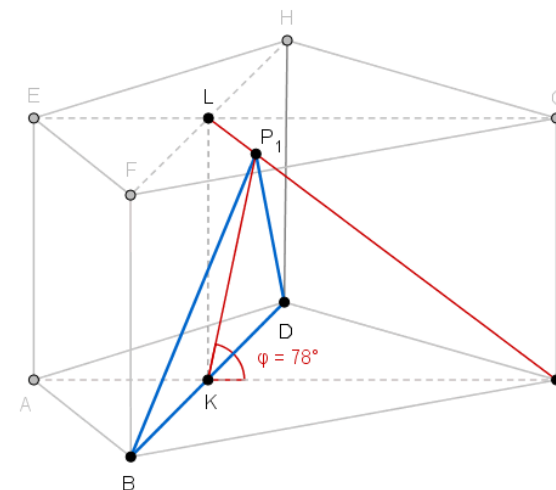
Zeichnen Sie das Dreieck  $BDP_1$  sowie die Strecke  $[KP_1]$  für  $\varphi = 78^\circ$  in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke  $BDP_n$  gleichseitig ist.

### Lösung zu Aufgabe B2.2

### Skizze

Einzeichnen des Dreiecks  $BDP_1$  sowie der Strecke  $[KP_1]$ :



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Antragen des Winkels  $\varphi = 78^\circ$  am Punkt  $K$ .
- 2) Einzeichnen des Punktes  $P_1$ . Der Punkt  $P_1$  ergibt sich als Schnittpunkt des Schenkels des Winkels  $\varphi$  und der der Strecke  $[LC]$ .
- 3) Verbinden der Punkte  $D$ ,  $B$  und  $P_1$  zum Dreieck  $BDP_1$ .
- 4) Einzeichnen der Strecke  $[KP_1]$ .

### Länge einer Strecke

Begründung, dass keines der Dreiecke  $BDP_n$  gleichseitig ist.

Gegeben:  $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$  (Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks)

Falls eines der Dreiecke gleichseitig wäre dann müsste die Höhe  $h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$  betragen.

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  berechnet man mit folgender Formel:

$$h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

In unserem Fall ist die Länge der Basis  $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$ .

Damit ergibt sich  $h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}$

Da die Punkte  $P_n \in [LC]$  gilt:  $\overline{KP_{max}} < 8 \text{ cm}$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Punkte  $P_n$  hätten den größten Abstand vom Punkt  $K$  wenn sie mit dem Punkt  $C$  zusammenfallen. Da  $\overline{KC} = 8 \text{ cm}$  ist aber  $\varphi \neq 0^\circ$  folgt also  $\overline{KP_{max}} < 8 \text{ cm}$ .

$$\overline{KP_{max}} = 8 \text{ cm} \neq h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$  die Dreiecke  $BDP_n$  sind nicht gleichseitig

### Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken  $[KP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:

$$\overline{KP_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm.}$$

Die Länge der Strecke  $[KP_0]$  ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für  $\varphi$  an.

### Lösung zu Aufgabe B2.3

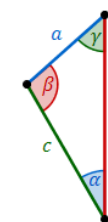
#### *Länge einer Strecke*

Gegeben:  $\overline{KC} = 8 \text{ cm}$  und  $\angle LCK = 36,87^\circ$

Gesucht:  $\overline{KP_n}(\varphi)$

Man betrachte das Dreieck  $KCP_n$ .

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $KCP_n$  gilt somit:  $\frac{\overline{KP_n}}{\overline{KC}} = \frac{\sin \angle LCK}{\sin \angle K P_n C}$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{KP_n}}{\overline{KC}} &= \frac{\sin \angle LCK}{\sin \angle K P_n C} \\ \frac{\overline{KP_n}}{8} &= \frac{\sin 36,87^\circ}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \mid \cdot 8 \\ \overline{KP_n} &= \frac{8 \cdot \sin 36,87^\circ}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \\ \overline{KP_n} &= \frac{4,80}{\sin (180^\circ - (\varphi + 36,87^\circ))} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Hier: } \sin\left(180^\circ - \underbrace{(\varphi + 36,87^\circ)}_{\alpha}\right) = \sin(\varphi + 36,87^\circ)$$

$$\overline{K P_n} = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Nun soll der Winkel  $\varphi$  angegeben werden, für den die Strecke  $[K P_0]$  minimal ist.

$$\text{Gegeben: } \overline{K P_n} = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Erläuterung:

Die Strecke  $\overline{K P_n}$  besteht aus einem Quotienten. Ein Quotient wird minimal, wenn der Nenner maximal wird.

Hier muss also der Quotient  $\frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)}$  den kleinstmöglichen Wert annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Sinus im Nenner maximal wird. Der größte Wert den der Sinus annehmen kann ist 1. Dies ist der Fall für  $+90^\circ$ .

$$90^\circ = \varphi_0 + 36,87^\circ \quad | - 36,87^\circ$$

$$\varphi_0 = 53,13^\circ$$

#### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind die Spitzen von Pyramiden  $ABCD P_n$  mit der Grundfläche  $ABCD$  und den Höhen  $[P_n Q_n]$ . Die Punkte  $Q_n$  liegen auf der Strecke  $[K C]$ .

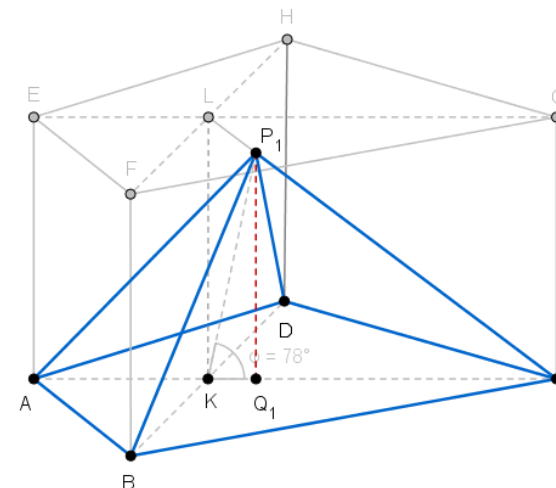
Zeichnen Sie die Pyramide  $ABCD P_1$  und die Höhe  $[P_1 Q_1]$  in das Schrägbild zu B 2.1 ein.

Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen  $V$  der Pyramiden  $ABCD P_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$\left[ \text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3 \right]$$

#### Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



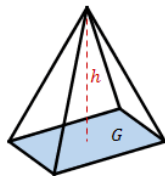
Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Verbinden der Punkte  $P_1$  und  $A$  zur Strecke  $[P_1 A]$
- 2) Einzeichnen der Höhe  $[P_1 Q_1]$  indem vom Punkt  $P_1$  das Lot zur Strecke  $[K C]$  gefällt wird.

#### Volumen einer Pyramide

$$\text{Gegeben: } \overline{AC} = 12 \text{ cm, } \overline{BD} = 10 \text{ cm und } \overline{K P_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit den Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Grundfläche  $G$  ist das Drachenviereck  $ABCD$ .

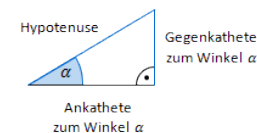
$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot h$$

$h = \overline{P_n Q_n}$ . Zur Berechnung der Streckenlänge  $\overline{P_n Q_n}$  betrachtet man das Dreieck  $K P_n Q_n$ .

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \varphi = \frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{K P_n}} \quad | \cdot \overline{K P_n}$$

$$\overline{P_n Q_n} = \sin \varphi \cdot \overline{K P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin \varphi \cdot \overline{K P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3$$

### Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide  $ABCD P_2$  beträgt  $96 \text{ cm}^3$ . Berechnen Sie das zugehörige Maß für  $\varphi$ .

### Lösung zu Aufgabe B2.5

#### Winkel bestimmen

$$\text{Gegeben: } V = \frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} \text{ cm}^3$$

Somit gilt für das Volumen der Pyramide  $ABCD P_2$ :

$$\frac{96 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} = 96 \mid : 96$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + 36,87^\circ)} = 1 \mid \cdot \sin(\varphi + 36,87^\circ)$$

$$\sin(\varphi + 36,87^\circ) = \sin \varphi \mid \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ + \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ = \sin \varphi \mid - \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ = \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid - \sin$$

$$\sin \varphi \cdot \cos 36,87^\circ - \sin \varphi = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid \text{Ausklammern}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term  $\sin \varphi$  wird auf der linken Seite der Gleichung ausgeklammert.

$$\sin \varphi \cdot (\cos 36,87^\circ - 1) = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ$$

$$\sin \varphi \cdot (\cos 36,87^\circ - 1) = -\cos \varphi \cdot \sin 36,87^\circ \mid : \cos \varphi$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (\cos 36,87^\circ - 1) = -\sin 36,87^\circ \mid : (\cos 36,87^\circ - 1)$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-\sin 36,87^\circ}{(\cos 36,87^\circ - 1)} \mid \text{Tangens anwenden}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels  $\alpha$  gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi = \frac{-\sin 36,87^\circ}{(\cos 36,87^\circ - 1)} \mid \tan^{-1} \varphi$$

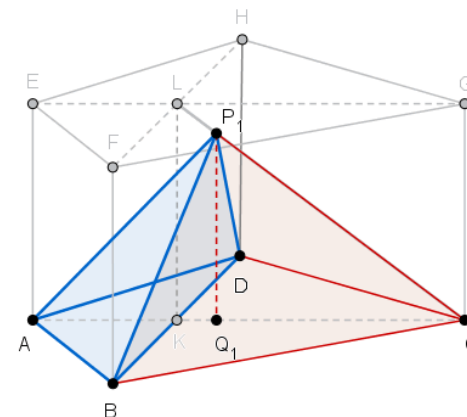
$$\varphi = 71,57^\circ$$

### Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden  $ABDP_n$  mit der Grundfläche  $ABD$  und der Pyramiden  $BCDP_n$  mit der Grundfläche  $BCD$  stets im Verhältnis 1 : 2 stehen.

### Lösung zu Aufgabe B2.6

#### Volumen der Teilkörper



Gegeben:  $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$ ,  $\overline{AK} = 4 \text{ cm}$  und  $\overline{KC} = 8 \text{ cm}$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Pyramide  $V_{ABDP_n}$  und die Pyramide  $V_{BCDP_n}$  haben jeweils dieselbe Höhe  $h$ .

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{G_1}{G_2}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AK}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{KC}}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8}$$

$$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{1}{2}$$