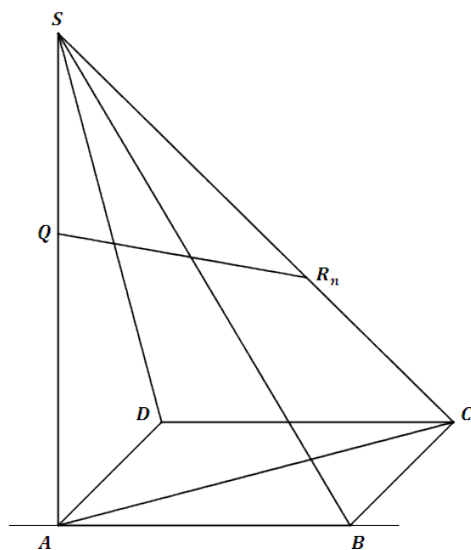


Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.

Das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6$ cm ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A . Der Winkel SCA hat das Maß $\gamma = 50^\circ$.

Der Punkt Q liegt auf der Kante $[AS]$ mit $\overline{AQ} = 6$ cm. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[CS]$, wobei die Winkel $R_n Q S$ das Maß ε mit $\varepsilon > 0^\circ$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε .

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \frac{2,64}{\sin(40^\circ + \varepsilon)} \text{ cm.}$$

[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10,11$ cm]

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

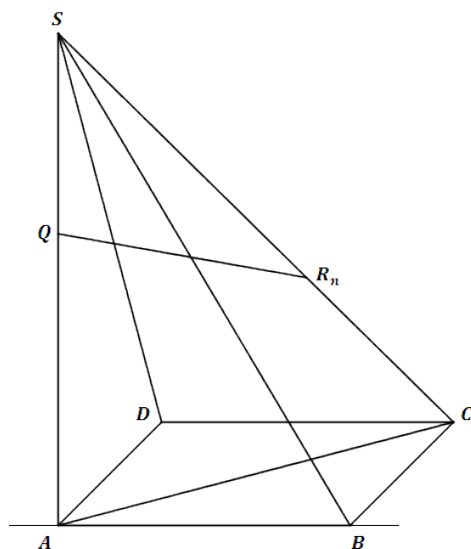
Berechnen Sie das Winkelmaß ε , sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

Lösung

Aufgabe P2.

Das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A . Der Winkel $\angle SCA$ hat das Maß $\gamma = 50^\circ$.

Der Punkt Q liegt auf der Kante $[AS]$ mit $\overline{AQ} = 6 \text{ cm}$. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[CS]$, wobei die Winkel $\angle R_n Q S$ das Maß ε mit $\varepsilon > 0^\circ$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

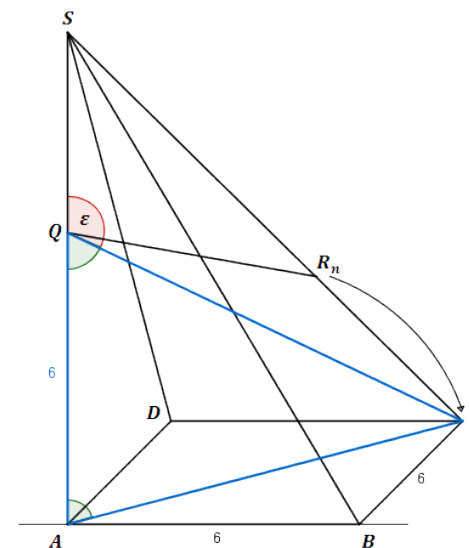
Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε .

Lösung zu Aufgabe P2.1**Winkel bestimmen**

Gegeben:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{AQ} = 6 \text{ cm}$$

Der Winkel ε wird dann am größten, wenn der Punkt R_n auf C liegt.



Nun betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ACQ . Der Winkel $\angle AQC$ ist Nebenwinkel des größtmöglichen Winkels ε .

Der Winkel $\angle AQC$ lässt sich in diesem Dreieck jedoch erst berechnen, wenn $\overline{AC}$ bekannt ist.

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

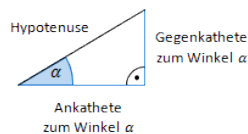
Die Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sind hier die Katheten, $[AC]$ ist die Hypotenuse.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle AQC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2} \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\angle AQC \approx 54,74^\circ$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 180^\circ - 54,74^\circ = 125,26^\circ$$

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \frac{2,64}{\sin(40^\circ + \varepsilon)} \text{ cm.}$$

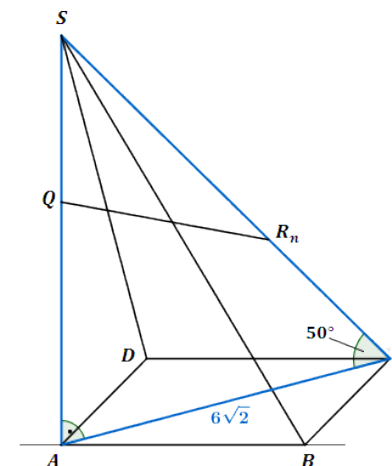
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10,11 \text{ cm}$]

Lösung zu Aufgabe P2.2

Länge einer Strecke

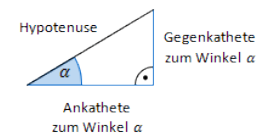
Gegeben: $\angle SCA = \gamma = 50^\circ$, $\overline{AC} = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ (aus Teilaufgabe 2.1)

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck ACS .



Hier kann $\overline{AS}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \gamma = \frac{\overline{AS}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{AS} = \overline{AC} \cdot \tan \gamma$$

$$\overline{AS} = 6\sqrt{2} \cdot \tan 50^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{AS} \approx 10,11 \text{ cm}$$

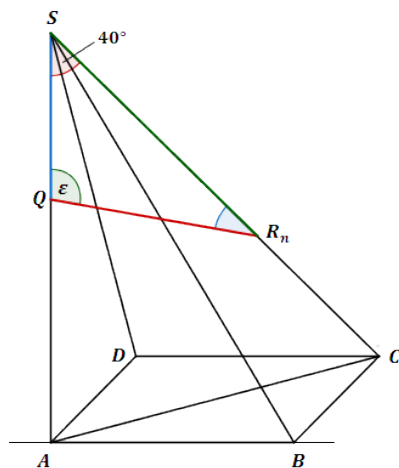
Außerdem kann im Dreieck ASC der Winkel ASC berechnet werden.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

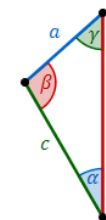
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\angle ASC = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Da $\overline{QR_n}$ berechnet werden soll, wird im Dreieck SQR_n der Sinussatz verwendet.



Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin \angle ASC} = \frac{\overline{QS}}{\sin \angle SQR_n}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{QS}}{\sin(180^\circ - (\varepsilon + 40^\circ))} \quad | \cdot \sin 40^\circ$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin x = \sin(180^\circ - x)$$

$$\overline{QR_n} = \frac{\sin 40^\circ \cdot 4,11}{\sin(\varepsilon + 40^\circ)} \quad (\overline{QS} = \overline{AS} - \overline{AQ} = 10,11 - 6 = 4,11)$$

$$\Rightarrow \overline{QR_n}(\varepsilon) = \frac{2,64}{\sin(40^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}$$

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Winkelmaß ε , sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

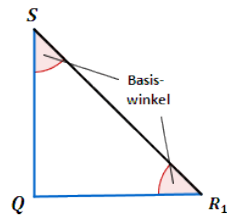
Lösung zu Aufgabe P2.3**Winkel bestimmen**

Gegeben aus Aufgabe 2.2: $\angle A S C = \angle Q S R_1 = 40^\circ$

Wenn $[Q R_1]$ und $[Q S]$ gleich lang sind, so sind diese Strecken die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $Q R_1 S$.

Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß.



Somit gilt: $\angle Q S R_1 = \angle S R_1 Q = 40^\circ$

Erläuterung:

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\Rightarrow \varepsilon = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$$