Mittlere-Reife-Prüfung 2019 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Vitamin D kann im menschlichen Körper produziert werden, wenn Sonnenstrahlung unter bestimmten Bedingungen auf die Haut trifft. Im Winterhalbjahr nimmt daher die Konzentration von Vitamin D im Körper normalerweise ab.
Bei Andreas wurde Ende September eine Anfangskonzentration von 55 Nanogramm Vitamin D pro Milliliter Blut $\left(55\frac{\text{ng}}{\text{ml}}\right)$ gemessen. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y\,\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ an Vitamin D lässt sich bei Andreas näherungsweise durch die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 55 \cdot 0,93^x$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right)$ beschreiben.

Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Um wie viel Prozent reduziert sich folglich bei Andreas die Konzentration an Vitamin D in einer Woche? Ergänzen Sie.

Die Konzentration reduziert sich in einer Woche um _____%.

Aufgabe A3.2 (1 Punkt)

Berechnen Sie mithilfe der Funktion f_1 die Konzentration an Vitamin D bei Andreas nach 21 Tagen.
Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie, in welcher Woche sich die Anfangskonzentration an Vitamin D bei Andreas entsprechend der Funktion f_1 halbiert.

Aufgabe A3.4 (1 Punkt)

Bei Stephan wurde gleichzeitig mit Andreas eine Messung begonnen. Bei Stephan lässt sich der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y\,\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ an Vitamin D annähernd durch die Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 51 \cdot 0,91^x$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+\right)$ beschreiben.
Ist es unter diesen Voraussetzungen möglich, dass die Konzentrationen an Vitamin D zu einem Zeitpunkt bei Stephan und Andreas den gleichen Wert erreichen?
Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Rechnung.

Lösung

Aufgabe A3.

Vitamin D kann im menschlichen Körper produziert werden, wenn Sonnenstrahlung unter bestimmten Bedingungen auf die Haut trifft. Im Winterhalbjahr nimmt daher die Konzentration von Vitamin D im Körper normalerweise ab.
Bei Andreas wurde Ende September eine Anfangskonzentration von 55 Nanogramm Vitamin D pro Milliliter Blut $\left(55\frac{\text{ng}}{\text{ml}}\right)$ gemessen. Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y\,\frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ an Vitamin D lässt sich bei Andreas näherungsweise durch die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = 55 \cdot 0,93^x$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right)$ beschreiben.

Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Um wie viel Prozent reduziert sich folglich bei Andreas die Konzentration an Vitamin D in einer Woche? Ergänzen Sie.

Die Konzentration reduziert sich in einer Woche um _____%.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = 55 \cdot 0,93^x$

Die prozentuale Zerfallsrate b' ist aus der Funktionsgleichung ablesbar.

Erläuterung: *Prozentuale Zuwachsrate*

Allgemeine Wachstumsfunktion: $y = a \cdot b^x$

a = Anfangsbestand, b = Änderungsrate (<1 bei Zerfall)

Prozentualer Zerfall = $(1 - b) \cdot 100\%$

$b' = (1 - 0,93) \cdot 100\% = 7\%$

Aufgabe A3.2 (1 Punkte)

Berechnen Sie mithilfe der Funktion f_1 die Konzentration an Vitamin D bei Andreas nach 21 Tagen.
Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Exponentielles Wachstum

21 Tage : 7 = 3 Wochen

$y = 55 \cdot 0,93^3 = 44,24 \ \frac{\text{ng}}{\text{ml}}$

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie, in welcher Woche sich die Anfangskonzentration an Vitamin D bei Andreas entsprechend der Funktion f_1 halbiert.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = 55 \cdot 0,93^x$

Anfangskonzentration: $55 \ \frac{\text{ng}}{\text{ml}}$

halbe Anfangskonzentration: $0,5 \cdot 055$

$0,5 \cdot 55 = 55 \cdot 0,93^x \qquad | : 55$

$0,5 = 0,93^x \qquad | \log_{0,93}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,93^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,93}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$x = \log_{0,93} 0,5$

$x = 9,55$

In der 10. Woche würde sich die Konzentration halbieren.

Aufgabe A3.4 (1 Punkte)

Bei Stephan wurde gleichzeitig mit Andreas eine Messung begonnen. Bei Stephan lässt sich der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Wochen und der verbleibenden Konzentration $y \frac{\text{ng}}{\text{ml}}$ an Vitamin D annähernd durch die Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 51 \cdot 0,91^x$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+\right)$ beschreiben.
Ist es unter diesen Voraussetzungen möglich, dass die Konzentrationen an Vitamin D zu einem Zeitpunkt bei Stephan und Andreas den gleichen Wert erreichen?
Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Rechnung.

Lösung zu Aufgabe A3.4

Exponentielles Wachstum

Nein, da die Anfangskonzentration bei Andreas $\left(55 \frac{\text{ng}}{\text{ml}}\right)$ größer ist als bei Stephan $\left(51 \frac{\text{ng}}{\text{ml}}\right)$ und die Abnahme (7 %)geringer ist.