Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -\log_{0,5}(x+2)+2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1 sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-1,5; 9]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 11$; $-5 \leqq y \leqq 8$.

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = 2$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 3$ hat ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_2 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Punkte $A_n(x| -2 \cdot \log_{0,5} x - 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $D_n(x| -\log_{0,5}(x+2)+2)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und C_n die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$. Es gilt: $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 1$ und das Parallelogramm $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von x es Parallelogramme $A_n B_n C_n D_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.5 (1 Punkt)

Die Winkel $B_n A_n D_n$ haben stets das gleiche Maß.
Berechnen Sie das Maß der Winkel $B_n A_n D_n$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Das Parallelogramm $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist eine Raute.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_3.
[Teilergebnis: $\overline{A_n D_n}(x) = \left[\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)+5\right]$ LE]

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -\log_{0,5}(x+2)+2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_1 sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie den Graphen zu f_1 für $x \in [-1,5; 9]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 11$; $-5 \leqq y \leqq 8$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsmenge einer Funktion

$f_1 : y = -\log_{0,5}(x+2)+2$

Definitionsmenge bestimmen:

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\log_{0,5}(x+2)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x+2>0$.

$x + 2 > 0 \quad | \quad -2$

$x > -2$

$\Rightarrow \quad D_{f_1} =]-2; \infty[$

Asymptoten einer Funktion

$D_{f_1} =]-2; \infty[$

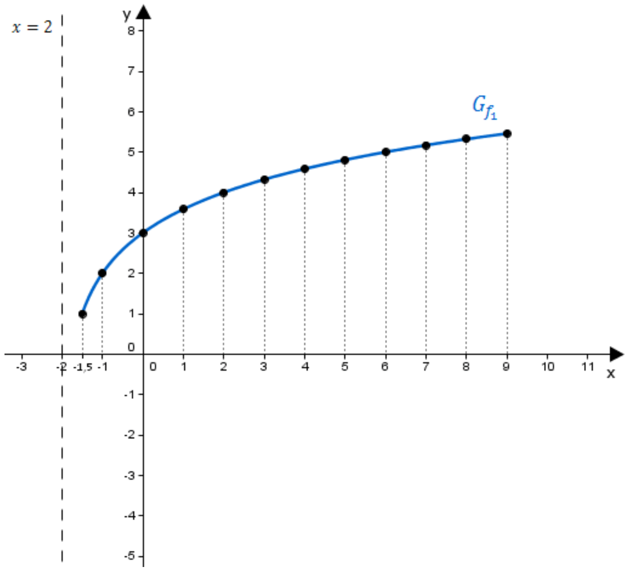
$\Rightarrow \quad h : x = -2 \quad$ (senkrechte Asymptote)

Skizze

Wertetabelle mit Hilfe des Taschenrechners erstellen:

x	$-1{,}5$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	2	3	3,58	4	4,32	4,58	4,81	5	5,17	5,32	5,46

Punkte im Koordinatensystem eintragen und miteinander verbinden:



Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = 2$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 3$ hat ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Lösung zu Aufgabe B1.2

Orthogonale Affinität

$f_1 : y = -\log_{0,5}(x+2) + 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x+2) + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab k:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hier ist $k = 2$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x+2) + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2\log_{0,5}(x+2) + 4 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2\log_{0,5}(x+2) + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -2\log_{0,5}(x+2) - 3 \end{pmatrix}$$

$x'' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x'' - 2$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $x = x'' + 2$ wird in y'' eingesetzt.

$y'' = -2\log_{0,5}(x'' - 2 + 2) - 3$

$y'' = -2\log_{0,5} x'' - 3$

> Erläuterung:
>
> Anstelle von y'' und x'' wird y und x geschrieben.

$\Rightarrow \quad f_2 : y = -2\log_{0,5} x - 3$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_2 an und zeichnen Sie den Graphen zu f_2 in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Definitionsmenge einer Funktion

$f_2 : y = -2\log_{0,5} x - 3$

Definitionsmenge bestimmen:

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> Die Logarithmusfunktion $\log_{0,5} x$ ist nur für positive Werte definiert. Das ist der Fall, wenn $x > 0$ ist.

$x > 0$

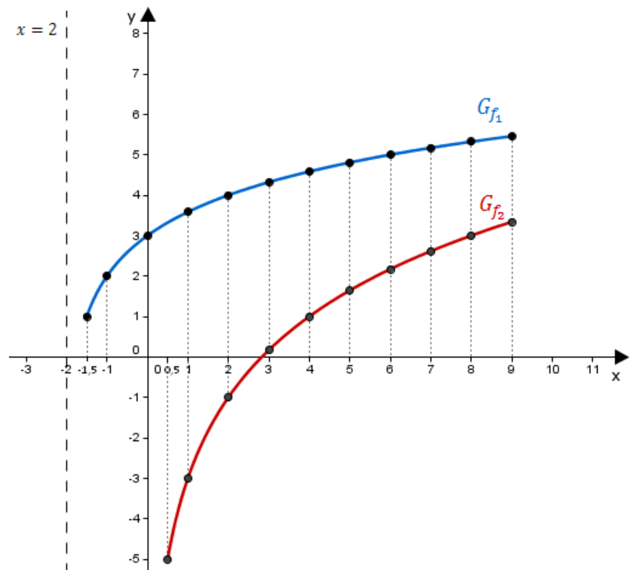
$\Rightarrow \quad D_{f_2} =]0; \infty[$

Skizze

Wertetabelle mit Hilfe des Taschenrechners erstellen:

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-5	-3	-1	0,17	1	1,64	2,17	2,61	3	3,34

Punkte im Koordinatensystem eintragen und miteinander verbinden:



Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Punkte $A_n(x| -2\cdot\log_{0,5} x - 3)$ auf dem Graphen zu f_2 und Punkte $D_n(x| -\log_{0,5}(x+2)+2)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und C_n die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$. Es gilt: $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie das Parallelogramm $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 1$ und das Parallelogramm $A_2 B_2 C_2 D_2$

für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von x es Parallelogramme $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

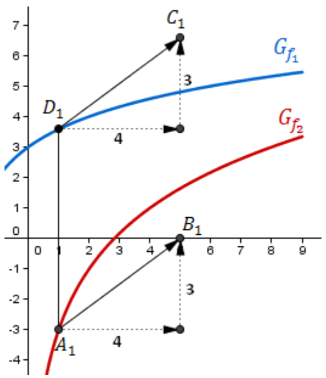
Lösung zu Aufgabe B1.4

Skizze

Parallelogramme $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

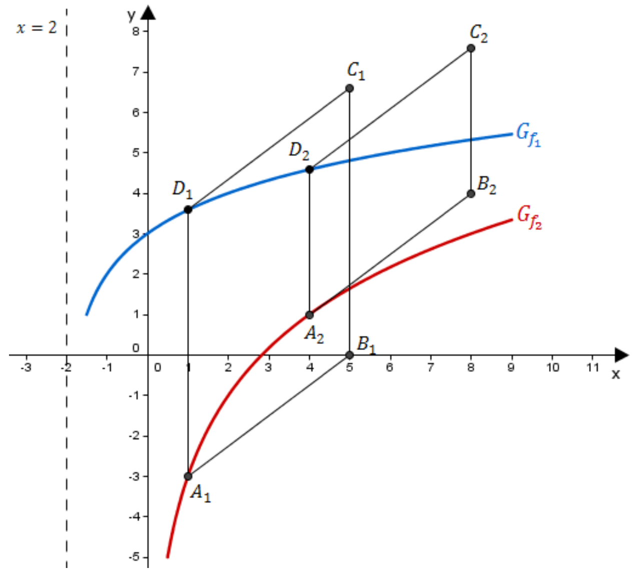
Erläuterung: *Erläuterung*

Punkte A_n liegen auf G_{f_2}, Punkte D_n auf G_{f_1}.



Bewegt man sich senkrecht, von der Stelle $x = 1$ aus, zu den Graphen der Funktionen, so können die Punkte A_1 und D_1 eingezeichnet werden.

Der Punkt C_1 entspricht dann dem um den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschobene Punkt D_1. Man bewegt sich vom Punkt D_1 aus 4 Längeneinheiten nach rechts und 3 Längeneinheiten nach oben um C_1 zu erreichen.
Gleiches gilt für den Punkt B_1 (wegen der Parallelität).



Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkt zwischen f_1 und f_2 bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$-\log_{0,5}(x+2) + 2 = -2\log_{0,5} x - 3 \quad | \quad +2\log_{0,5} x$

$2\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) + 2 = -3 \quad | \quad -2$

$2\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) = -5$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

$\log_a\left(s^t\right) = t \cdot \log_a s$

$\log_{0,5} x^2 - \log_{0,5}(x+2) = -5$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

$\log_a\left(\frac{s}{t}\right) = \log_a s - \log_a t$

$\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = -5$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_{0,5}$ kann durch die Exponentialfunktion $0,5^x$ aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_{0,5} x = -2 \quad \Rightarrow \quad 0,5^{\log_2 x} = 0,5^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = 4$

$\frac{x^2}{x+2} = \underbrace{0,5^{-5}}_{=32} \quad | \quad \cdot(x+2)$

$x^2 = 32x + 64 \quad | \quad -32x - 64$

$x^2 - 32x + 64 = 0$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Lösungen x_1 und x_2 können entweder über die Mitternachtsformel oder den Taschenrechner ermittelt werden.

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 - 4a\,c}}{2a}$

x_2 muss ausgeschlossen werden, da $-1,89$ nicht im Definitionsbereich von f_2 liegt und somit keine gültige Lösung darstellt.

$x_1 = 33,89 \quad$ (und $\quad x_2 = -1,89 \notin D_{f_2} =]0;\infty[$)

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Definitionsbereich von f_2 ist $D_{f_2} =]0;\infty[$. Ein Punkt A_n (der per Definition auf f_2 liegt) kann es nur geben, wenn $x > 0$ ist.

An der Stelle $x = 33,89$, wo sich die Graphen von f_1 und f_2 schneiden, liegen die Punkte A_n und D_n aufeinander und es gibt somit kein Parallelogramm. Es muss also auch $x < 33,89$ gelten.

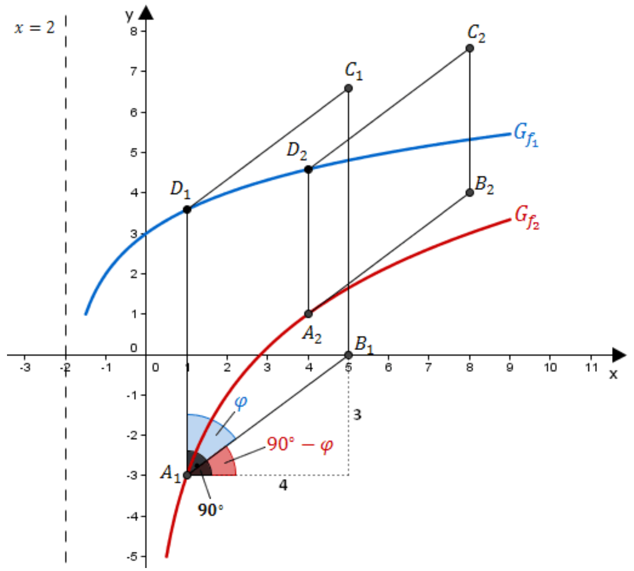
Für $x \in]0;33,89[$ gibt es Prallelogramme $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.

Aufgabe B1.5 (1 Punkte)

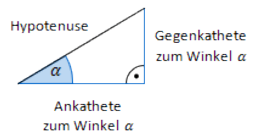
Die Winkel $B_n\,A_n\,D_n$ haben stets das gleiche Maß.
Berechnen Sie das Maß der Winkel $B_n\,A_n\,D_n$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Winkel bestimmen



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan(90° - \varphi) = \frac{3}{4}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $90° - \varphi$ aus $\tan(90° - \varphi) = \frac{3}{4}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{3}{4}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$90° - \varphi \approx 36{,}57°$$

$$\varphi = 90° - 36{,}57°$$

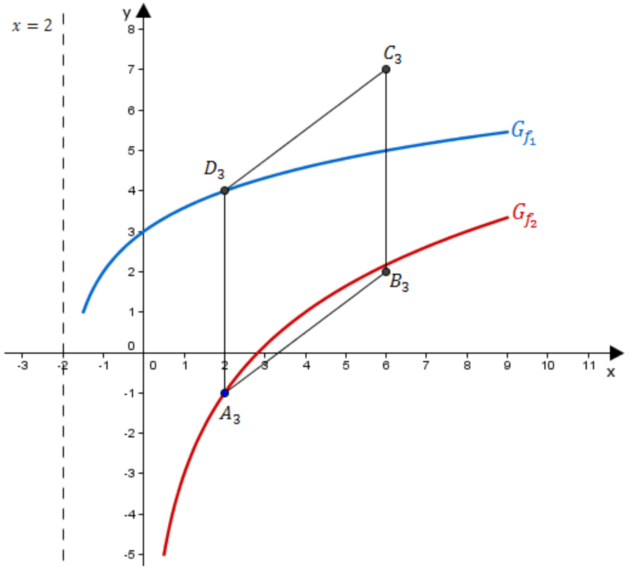
$$\Rightarrow \quad \varphi = 53{,}13°$$

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Das Parallelogramm $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ ist eine Raute.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_3.
[Teilergebnis: $\overline{A_n\,D_n}(x) = \left[\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 5\right]$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.6

Länge eines Vektors



Eigenschaft der Raute:

> Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*
>
> Eine Raute hat gleich lange Seiten. Da gegenüberliegende Seiten parallel sind, kann man auch sagen, dass anliegende Seiten gleich lang sind.
>
> Man setzt also die Länge der Seiten $[A_n D_n]$ und $[D_n C_n]$ gleich.

$\overline{A_n D_n} = \overline{D_n C_n}$

Länge der Seite $[D_n C_n]$ bestimmen:

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist aus Teilaufgabe 1.4 bekannt.

$\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

> Erläuterung: *Länge eines Vektors*
>
> Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\overline{D_n C_n} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Länge der Seite $[A_n D_n]$ bestimmen:

$\overrightarrow{A_n D_n} = \overrightarrow{D_n} - \overrightarrow{A_n}$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Die Vektoren $\overrightarrow{A_n}$ und $\overrightarrow{D_n}$ sind aus Teilaufgabe 1.4 bekannt.

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x+2)+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -2\log_{0,5} x - 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) + 5 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*
>
> $\log_a \left(s^t\right) = t \cdot \log_a s$

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log_{0,5} x^2 - \log_{0,5}(x+2) + 5 \end{pmatrix}$$

> Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*
>
> $\log_a \left(\frac{s}{t}\right) = \log_a s - \log_a t$

$$\overrightarrow{A_n\,D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{A_n\,D_n} = \sqrt{0^2 + \left[\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 5\right]^2}$$

$$\overline{A_n\,D_n} = \log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 5$$

x-Wert für A_3 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Da $\overline{D_n\,C_n} = 5$, gilt: $\overline{A_n\,D_n} = 5$

$$\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) + 5 = 5 \quad | \quad -5$$

$$\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0$$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Da $\log_a 1 = 0$, nimmt die Logarithmusfunktion $\log_{0,5}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$ den Wert Null an,

wenn das Argument $\frac{x^2}{x+2} = 1$ ist.

$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \quad | \quad \cdot(x+2)$$

$$x^2 = x + 2 \quad | \quad -(x+2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

x_2 muss ausgeschlossen werden, da -1 nicht im Definitionsbereich von f_2 liegt und somit keine gültige Lösung darstellt.

$x_1 = 2 \quad$ (und $\quad x_2 = -1 \notin D_{f_2} =]0;\infty[$)

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 2$ wird in $\overrightarrow{A_n}$ eingesetzt.

$$\overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\log_{0,5} 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_3(2|-1)$$