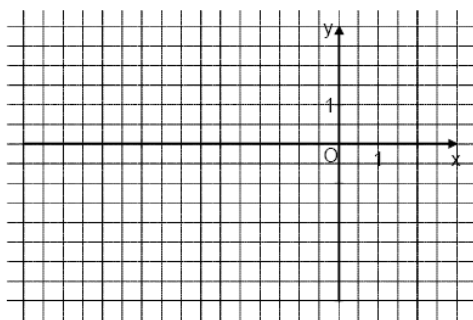


Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.0

Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in]37^\circ; 180^\circ[$ Parallelegramme $OP_n Q_n R_n$ auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OR_1}$ für $\varphi = 65^\circ$ sowie $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OR_2}$ für $\varphi = 150^\circ$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. Zeichnen Sie sodann die Parallelegramme $OP_1 Q_1 R_1$ und $OP_2 Q_2 R_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $|OP_n|$ in Abhängigkeit von φ gilt:
 $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25}$ LE.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit dem Radius $r = 3$ LE liegen.

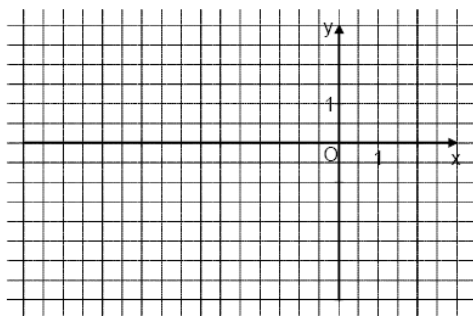
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelogramm $OP_3 Q_3 R_3$ ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile $\overrightarrow{OP_3}$ und $\overrightarrow{OR_3}$ aufgespannt. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A2.0

Die Pfeile $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ mit $O(0|0)$ spannen für $\varphi \in]37^\circ; 180^\circ[$ Parallelegramme $OP_nQ_nR_n$ auf.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OR_1}$ für $\varphi = 65^\circ$ sowie $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OR_2}$ für $\varphi = 150^\circ$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. Zeichnen Sie sodann die Parallelegramme $OP_1Q_1R_1$ und $OP_2Q_2R_2$ in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Koordinaten von Vektoren bestimmen

$$\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OR_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Pfeile $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OR_1}$ für $\varphi = 65^\circ$ bestimmen:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 65^\circ - 2 \\ 0,5 \cdot \sin 65^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,15 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

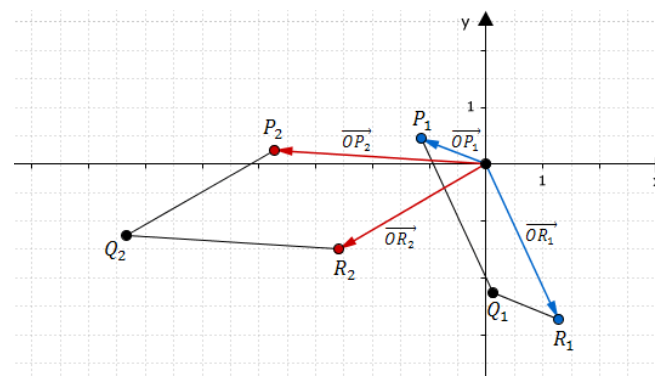
$$\overrightarrow{OR_1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 65^\circ \\ -3 \cdot \sin 65^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,27 \\ -2,72 \end{pmatrix}$$

Pfeile $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OR_2}$ für $\varphi = 150^\circ$ bestimmen:

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 150^\circ - 2 \\ 0,5 \cdot \sin 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,73 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR_2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 150^\circ \\ -3 \cdot \sin 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,60 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Skizze



Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[OP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
 $OP_n(\varphi) = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25}$ LE.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{OP_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Länge $\overline{OP_n(\varphi)}$ des Vektors $\overrightarrow{OP_n}$ bestimmen:

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \left| \overrightarrow{OP_n(\varphi)} \right|$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \left| \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\bar{a}$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{(2 \cdot \cos \varphi - 2)^2 + (0,5 \cdot \sin \varphi)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Zweite binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Die zweite binomische Formel wird auf $(2 \cdot \cos \varphi - 2)^2$ angewendet:

$$\begin{aligned} \overbrace{(2 \cdot \cos \varphi - 2)}^{a-b} &= (2 \cdot \cos \varphi)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot 2 + 2^2 \\ (2 \cdot \cos \varphi - 2)^2 &= 4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 \end{aligned}$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

$\sin^2 \varphi$ wird durch $1 - \cos^2 \varphi$ ersetzt, da nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 \cdot (1 - \cos^2 \varphi)}$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 - 0,25 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25} \text{ LE}$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit dem Radius $r = 3$ LE liegen.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{OR_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Länge $\overline{OR_n(\varphi)}$ des Vektors $\overrightarrow{OR_n(\varphi)}$ bestimmen:

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \left| \overrightarrow{OR_n(\varphi)} \right|$$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \left| \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge $\bar{a}$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{(3 \cdot \cos \varphi)^2 + (-3 \cdot \sin \varphi)^2}$$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{9 \cdot \cos^2 \varphi + 9 \cdot \sin^2 \varphi} \quad | \text{ 9 ausklammern}$$

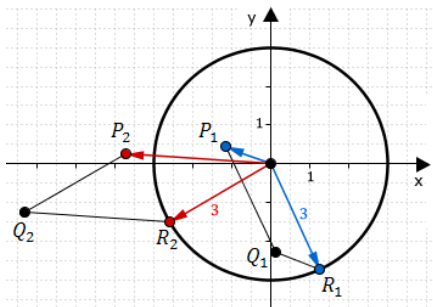
$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{9 \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1} \quad | \text{ trigonometrischen Pythagoras anwenden}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

Nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

$$\overline{OP_n}(\varphi) = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \overline{OP_n}(\varphi) = 3 \text{ LE}$$



Für alle Winkel $\varphi \in]37^\circ; 180^\circ[$ gilt: $\overline{OP_n}(\varphi) = 3$. Somit liegen die Punkte R_n auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt O mit Radius $r = 3$ LE.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelogramm $OP_3Q_3R_3$ ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile $\overrightarrow{OP_3}$ und $\overrightarrow{OR_3}$ aufgespannt.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Wurzelgleichungen

Laut Teilaufgabe A 2.2 gilt: $\overline{OP_n} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi + 4,25}$

$$\Rightarrow \overline{OP_3} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25}$$

Laut Teilaufgabe A 2.3 gilt: $\overline{OR_n} = 3$ LE

$$\Rightarrow \overline{OR_3} = 3$$

Das Parallelogramm $OP_3Q_3R_3$ ist eine Raute, also gilt: $\overline{OP_3} = \overline{OR_3}$

$$\sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25} = 3 \quad | \quad \text{Quadrieren}$$

$$3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25 = 9 \quad | \quad -9$$

$$3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi - 4,75 = 0 \quad | \quad \text{Ersetzung: } \cos \varphi = x$$

$$3,75x^2 - 8x - 4,75 = 0 \quad | \quad \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3,75 \cdot (-4,75)}}{2 \cdot 3,75}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Rückersetzung:

$$\cos \varphi = x_1$$

$$\cos \varphi = \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\cos \varphi = \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$ zu bestimmen, wird folgendes im Taschenrechner (TR) eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \cos$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left(\frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5} \right) = 118,94^\circ$$

Bemerkung: $x_2 = \frac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5}$ wird verworfen, da $\frac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5} = 2,62$ und der Kosinus eines Winkels höchstens den Wert 1 haben kann.