Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(0|0)$ und $B(5|-1)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$ mit $\alpha \in [0°;180°]$ Eckpunkte von Vierecken $A\,B\,C_n\,D_n$. Die Winkel $D_n\,C_n\,B$ haben stets das Maß $90°$ und für die Strecken $[C_n\,D_n]$ gilt: $\overline{C_n\,D_n} = \frac{1}{2}\cdot\overline{B\,C_n}$

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_1 für $\alpha = 45°$ und C_2 für $\alpha = 100°$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die Vierecke $A\,B\,C_1\,D_1$ und $A\,B\,C_2\,D_2$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 10$; $-2 \leqq y \leqq 8$

Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D_n in Abhängigkeit von α und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n an.
[Teilergebnis: $D_n(7,5\cos\alpha+1|5,75)$]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Bei den Vierecken $A\,B\,C_3\,D_3$ und $A\,B\,C_4\,D_4$ sind die Seiten $[A\,D_3]$ bzw. $[A\,D_4]$ um 50% länger als die Seite $[A\,B]$.
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für α. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Das Viereck $A\,B\,C_5\,D_5$ ist ein Trapez, wobei die Seite $[A\,D_5]$ parallel zur Seite $[B\,C_5]$ ist.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Im Viereck $A\,B\,C_6\,D_6$ stehen die Seiten $[A\,B]$ und $[B\,C_6]$ aufeinander senkrecht.
Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den zugehörigen Wert für α.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(0|0)$ und $B(5|-1)$ sind zusammen mit den Punkten $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$ mit $\alpha \in [0°;180°]$ Eckpunkte von Vierecken $A\,B\,C_n\,D_n$. Die Winkel $D_n\,C_n\,B$ haben stets das Maß $90°$ und für die Strecken $[C_n\,D_n]$ gilt: $\overline{C_n\,D_n} = \frac{1}{2}\cdot\overline{B\,C_n}$

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_1 für $\alpha = 45°$ und C_2 für $\alpha = 100°$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann die Vierecke $A\,B\,C_1\,D_1$ und $A\,B\,C_2\,D_2$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 10$; $-2 \leqq y \leqq 8$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$, $\alpha_1 = 45°$, $\alpha_2 = 100°$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\alpha_1 = 45°$ und $\alpha_2 = 100°$ werden in $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$ eingesetzt.

$C_1(6\cos 45°+4,5|-3\cos 45°+6)$

$\Rightarrow \quad C_1(8,74|3,88)$

$C_2(6\cos 100°+4,5|-3\cos 100°+6)$

$\Rightarrow \quad C_2(3,46|6,52)$

Skizze

Gegeben: $A(0|0)$, $B(5|-1)$, $\overline{C_n\,D_n} = \frac{1}{2}\cdot\overline{B\,C_n}$

Vierecke $A\,B\,C_1\,D_1$ und $A\,B\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

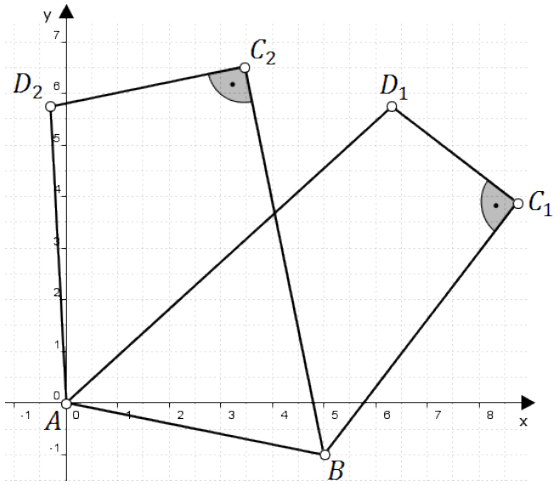
Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Punkte A, B und C_1 einzeichnen und verbinden

2) An die Strecke $[B\,C_1]$ werden bei C_1 $90°$ gegen den Uhrzeigersinn angetragen. Dies ist die Strecke $[C_1\,D_1]$ mit $\overline{C_1\,D_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{B\,C_1}$

3) Punkte verbinden

Viereck $A\,B\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe B2.2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D_n in Abhängigkeit von α und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte D_n an.
[Teilergebnis: $D_n(7,5\cos\alpha + 1|5,75)$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $B(5|-1)$, $C_n(6\cos\alpha + 4,5|-3\cos\alpha + 6)$, $\overline{C_n\,D_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{B\,C_n}$

Gesucht: D_n

Vorüberlegung: Wie kommt man von B nach D_n?

Erläuterung: *Drehmatrix*

Die Punkte D_n erhält man durch Drehung von $\overrightarrow{C_n\,B}$ um C_n mit dem Drehwinkel $-90°$ (Drehung im Uhrzeigersinn) und dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$.

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{C_n\,B} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C_n}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6\cos\alpha + 4,5 \\ -3\cos\alpha + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\cos\alpha + 0,5 \\ 3\cos\alpha - 7 \end{pmatrix}$$

Drehung um $-90°$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\,(-90°) & -\sin\,(-90°) \\ \sin\,(-90°) & \cos\,(-90°) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6\cos\alpha + 0,5 \\ 3\cos\alpha - 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Kosinus eines negativen Winkels, Sinus eines negativen Winkels*

Sinus eines negativen Winkels: $\sin(-x) = -\sin x$

Kosinus eines negativen Winkels: $\cos(-x) = \cos x$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° \\ -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6\cos\alpha + 0,5 \\ 3\cos\alpha - 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6\cos\alpha + 0,5 \\ 3\cos\alpha - 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha - 7 \\ 6\cos\alpha - 0,5 \end{pmatrix}$$

Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos\alpha - 7 \\ 6\cos\alpha - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5\cos\alpha - 3,5 \\ 3\cos\alpha - 0,25 \end{pmatrix}$$

Da nicht um den Ursprung gedreht wurde, muss noch das Drehzentrum C_n aufaddiert werden:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5\cos\alpha - 3,5 \\ 3\cos\alpha - 0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\cos\alpha + 4,5 \\ -3\cos\alpha + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5\cos\alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad D_n(7,5\cos\alpha + 1|5,75)$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Da der y-Wert von D_n die Konstante $5,75$ ist, lautet die Gleichung für den Trägergraphen:

$t: y = 5,75$

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Bei den Vierecken $A\,B\,C_3\,D_3$ und $A\,B\,C_4\,D_4$ sind die Seiten $[A\,D_3]$ bzw. $[A\,D_4]$ um 50% länger als die Seite $[A\,B]$.
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für α. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B2.3

Winkel bestimmen

Gegeben: $A(0|0)$, $B(5|-1)$, $D_n(7,5\cos\alpha + 1|5,75)$

Da die Seiten $[A\,D_3]$ bzw. $[A\,D_4]$ um 50% länger als die Seite $[A\,B]$ sind, gilt:

$\overline{A\,D_n} = 1,5 \cdot \overline{A\,B}$

$$\overrightarrow{A\,D_n} = \begin{pmatrix} 7,5\cos\alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5\cos\alpha + 1 \\ 5,75 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A\,B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors, Länge eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$\overline{A\,D_n} = \sqrt{(7,5\cos\alpha + 1)^2 + 5,75^2}$

$\overline{A\,B} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{A\,D_n} = 1,5 \cdot \overline{A\,B}$

$\sqrt{(7,5\cos\alpha + 1)^2 + 5,75^2} = 1,5 \cdot \sqrt{26} \quad | \quad$ Quadrieren

$(7,5\cos\alpha + 1)^2 + 5,75^2 = 1,5^2 \cdot 26 \quad | \quad -5,75^2$

$(7,5\cos\alpha + 1)^2 = 58,5 - 5,75^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$7,5\cos\alpha + 1 = \pm\sqrt{58,5 - 5,75^2} \quad | \quad -1$

$7,5\cos\alpha = \pm\sqrt{58,5 - 5,75^2} - 1 \quad | \quad :7,5$

$\cos\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{58,5 - 5,75^2} - 1}{7,5} \quad | \quad \cos^{-1}$

$\Rightarrow \quad \alpha_1 = 57,37°, \quad \alpha_2 = 143,69°$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Das Viereck $A\,B\,C_5\,D_5$ ist ein Trapez, wobei die Seite $[A\,D_5]$ parallel zur Seite $[B\,C_5]$ ist.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Winkel bestimmen

Gegeben:

$A(0|0)$, $B(5|-1)$, $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$, $D_n(7,5\cos\alpha+1|5,75)$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden AB durch die Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet man mit der Formel:

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$m_{A\,D_n}=\frac{5,75-0}{7,5\cos\alpha+1-0}=\frac{5,75}{7,5\cos\alpha+1}$$
$$m_{B\,C_n}=\frac{-3\cos\alpha+6-(-1)}{6\cos\alpha+4,5-5}=\frac{-3\cos\alpha+7}{6\cos\alpha-0,5}$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Parallele Strecken haben die gleiche Steigung.

$m_{A\,D_n}=m_{B\,C_n}$

$\frac{5,75}{7,5\cos\alpha+1}=\frac{-3\cos\alpha+7}{6\cos\alpha-0,5}$ | über Kreuz multiplizieren

$5,75\cdot(6\cos\alpha-0,5)=(7,5\cos\alpha+1)\cdot(-3\cos\alpha+7)$ | Klammern auflösen

$34,5\cos\alpha-2,875=-22,5\cos^2\alpha+52,5\cos\alpha-3\cos\alpha+7$ | Zusammenfassen

$22,5\cos^2\alpha-15\cos\alpha-9,875=0$

Substitution: $z=\cos\alpha$

$22,5z^2-15z-9,875=0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2+b\,x+c=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$z_{1,2}=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 22,5\cdot(-9,875)}}{2\cdot 22,5}$$

$z_1=-0,41$, $z_2=1,07$

Resubstitution:

$-0,41=\cos\alpha$ | $\cos^{-1}$

$\Rightarrow\quad \alpha=114,20°$

($z_2=1,07=\cos\alpha$ ist nicht definiert, da der Kosinus eines Winkels immer höchstens 1 ist)

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Im Viereck $A\,B\,C_6\,D_6$ stehen die Seiten $[A\,B]$ und $[B\,C_6]$ aufeinander senkrecht. Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den zugehörigen Wert für α.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

Gegeben:

$A(0|0)$, $B(5|-1)$, $C_n(6\cos\alpha+4,5|-3\cos\alpha+6)$

Erläuterung: *Senkrechte Strecken , Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC_n}=0$

$$\begin{pmatrix} 5-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6\cos\alpha + 4,5 - 5 \\ -3\cos\alpha + 6 - (-1) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6\cos\alpha - 0,5 \\ -3\cos\alpha + 7 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$5 \cdot (6\cos\alpha - 0,5) - 1 \cdot (-3\cos\alpha + 7) = 0$$

$$30\cos\alpha - 2,5 + 3\cos\alpha - 7 = 0$$

$$33\cos\alpha - 9,5 = 0 \quad | \quad +9,5$$

$$33\cos\alpha = 9,5 \quad | \quad :33$$

$$\cos\alpha = \frac{9,5}{33} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 73,27^\circ$$