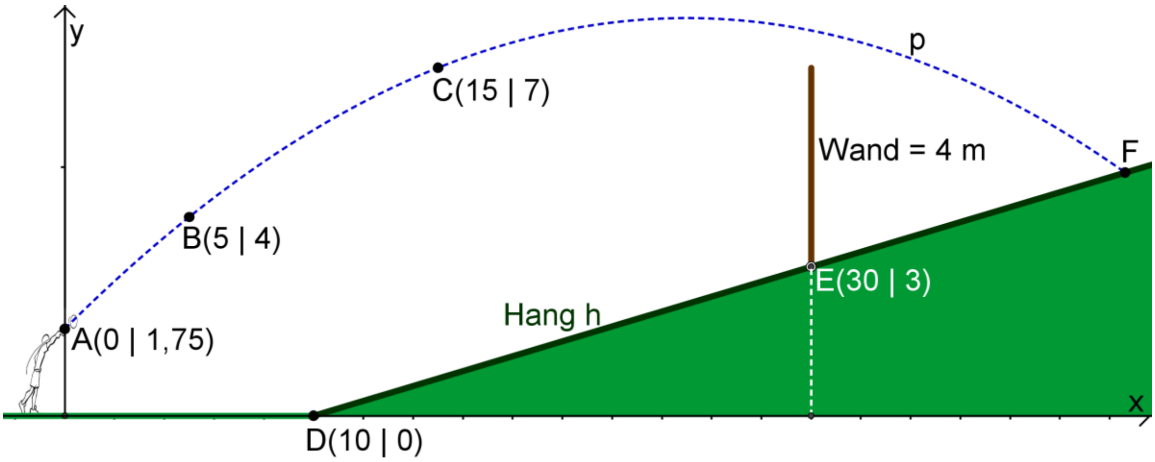
Musterprüfung Mathematik an Wirtschaftsschulen Aufgabe B2 Funktionale Zusammenhänge

Modul B2

Im Sportunterricht der 10. Klasse werden Wurfspiele durchgeführt. Um die Note 1 zu erhalten, muss der Ball über eine, auf einem Hang (Punkt E) stehende, 4 m hohe Wand geworfen werden. Die Abbildung zeigt Pauls Wurf. Der Ball wird im Punkt A abgeworfen und fliegt parabelförmig durch die Punkte B und C.



Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Ermitteln Sie nachvollziehbar die Funktionsgleichung der Flugparabel p.
(Ergebnis p: $y = -0{,}01x^2 + 0{,}5x + 1{,}75$)

Der Hang wird durch die Gerade h beschrieben, die durch die Punkte D und E verläuft.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Hanges h.
(Ergebnis h: $y = 0{,}15x - 1{,}5$)

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes F des Balles am Hang.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

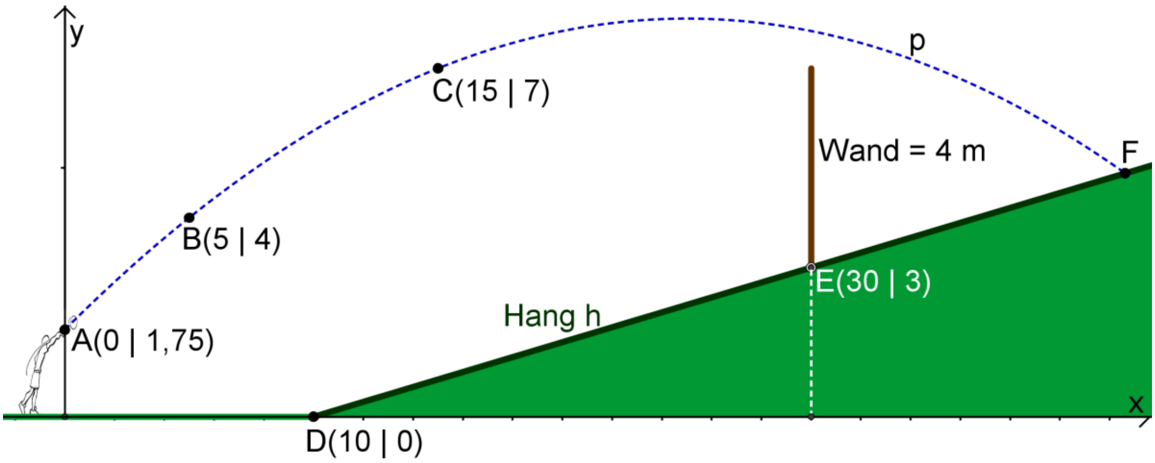
Zeigen Sie rechnerisch, dass Paul für diesen Wurf die Note 1 erhält.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie, nach wie vielen Metern der Ball den höchsten Punkt der Flugparabel p erreicht.

Lösung

Im Sportunterricht der 10. Klasse werden Wurfspiele durchgeführt. Um die Note 1 zu erhalten, muss der Ball über eine, auf einem Hang (Punkt E) stehende, 4 m hohe Wand geworfen werden. Die Abbildung zeigt Pauls Wurf. Der Ball wird im Punkt A abgeworfen und fliegt parabelförmig durch die Punkte B und C.



Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Ermitteln Sie nachvollziehbar die Funktionsgleichung der Flugparabel p.
(Ergebnis p: $y = -0{,}01x^2 + 0{,}5x + 1{,}75$)

Lösung zu Aufgabe B2.1

Funktionsgleichung bestimmen

Wir wollen eine Funktionsgleichung der Form $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ bestimmen.

Wir benötigen also die drei Parameter a, b und c.

Da c den y-Achsenabschnitt der Parabel darstellt, lässt c sich aus dem Punkt A(0|1,75) ablesen:

$$\boldsymbol{c = 1{,}75}$$

Die beiden anderen Parameter erhalten wir, in dem wir die Punkte B und C und den Parameter c in die allgemeine Funktionsgleichung der Parabel für y und x einsetzen.

I: $4 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 1{,}75$
II: $7 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 1{,}75$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, das wir mit Hilfe der bekannten Lösungsverfahren auflösen. (hier Additionsverfahren)

I: $4 = 25a + 5b + 1{,}75$
II: $7 = 225a + 15b + 1{,}75$ II – 3·I

$7 - 12 = 225a - 75a + 15b - 15b + 1{,}75 - 5{,}25$

$-5 = 150a - 3{,}5$ | + 3,5
$-1{,}5 = 150a$ | : 15
a = - 0,01 in I

$4 = 25 \cdot (-0{,}01) + 5b + 1{,}75$
$4 = -0{,}25 + 5b + 1{,}75$ | + 0,25; - 1,75
$2{,}5 = 5b$ | : 5
b = 0,5

→ **p: $y = -0{,}01x^2 + 0{,}5x + 1{,}75$**

Der Hang wird durch die Gerade h beschrieben, die durch die Punkte D und E verläuft.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Hanges h.
(Ergebnis h: $y = 0{,}15x - 1{,}5$)

Lösung zu Aufgabe B2.2

Geradengleichung bestimmen

Da wir die Koordinaten der Punkte D und E kennen, können wir ganz mit Hilfe der Zwei-Punkt-Form die Funktionsgleichung ermitteln oder wir stellen wieder ein Gleichungssystem auf.

Allgemeine Form der linearen Funktion:

$y = mx + t$ einsetzen der Koordinaten von D und E ergibt:

I: $0 = 10m + t \rightarrow t = -10m$ in II
II: $3 = 30m + t$

→ $3 = 30m - 10m$
$3 = 20m$ | : 20
m = 0,15
→ **t** $= -10 \cdot 0{,}15 =$ **- 1,5**

→ **<u>y = 0,15x – 1,5</u>**

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten des Auftreffpunktes F des Balles am Hang.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Schnitt zweier Funktionen

Der Auftreffpunkt des Balles ist der Schnittpunkt der Parabel mit der Gerade. Um diesen zu berechnen, müssen wir die beiden Funktionsgleichungen über y gleichsetzen.

$-0{,}01x^2 + 0{,}5x + 1{,}75 = 0{,}15x - 1{,}5 \quad | -0{,}15x + 1{,}5$

$-0{,}01x^2 + 0{,}35x + 3{,}25 = 0$ wir erhalten somit eine quadratische Gleichung, die wir mit Hilfe der Mitternachtsformel lösen können.

$$x_{1,2} = \frac{-0{,}35 \pm \sqrt{0{,}1225 + 0{,}13}}{-0{,}02} \quad \Rightarrow \quad (x_1 = -7{,}62)\ ; x_2 = 42{,}62$$

Der Wert für x_1 kommt für uns nicht in Frage, da er im negativen Bereich der x-Achse liegt. Setzen wir also den Wert für x_2 in die Gleichung der Geraden ein, so erhalten wir den Wert für y.

x_2 in g: $y = 0{,}15 \cdot 42{,}62 - 1{,}5 = 4{,}89$

Der Ball trifft im Punkt **<u>F(42,62 | 4,89)</u>** am Hang auf.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass Paul für diesen Wurf die Note 1 erhält.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Einsetzen

Paul bekommt die Note 1, wenn er den Ball über die Wand wirft. Also müssen wir die Höhe der Flugbahn im Punkt E ermitteln.
Aus den Koordinaten von Punkt E können wir ablesen, dass dieser in 3m Höhe liegt(y-Wert). Die Wand selbst ist 4m hoch. Somit ergibt sich eine zu überwindende Höhe von 7m.

Setzen wir nun den x-Wert von Punkt E in die Parabel ein, so ergibt sich die Flughöhe im Punkt E.

x = 30 in p einsetzen:

$y = -0{,}01 \cdot 30^2 + 0{,}5 \cdot 30 + 1{,}75 = \underline{\mathbf{7{,}75\ m}} > 7\text{m}$

Der Ball fliegt über die Wand und Paul bekommt daher die Note 1.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie, nach wie vielen Metern der Ball den höchsten Punkt der Flugparabel p erreicht.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Scheitelpunkt einer Parabel

Hier können wir über die Formeln für die x-Koordinate im Scheitelpunkt den Wert x_S ermitteln, der angibt, nach wie vielen Metern die maximale Höhe der Flugbahn erreicht wird.

$x_S = \frac{-0{,}5}{-0{,}02} = \underline{\mathbf{25m}}$

Die maximale Flughöhe wird nach 25m erreicht.